

## ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.063

### ЛИНЕЙНАЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕСТОВЫХ ПРИМЕРОВ НИВЕЛИРНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

канд. техн. наук **П.М. ЛЕВДАНСКИЙ**  
(ООО «Легром», Минск);

**П.В. СУББОТЕНКО**

(Белорусский национальный технический университет, Минск);

**Н.С. СЫРОВА**

(БЕЛГУТ, Гомель);

канд. техн. наук **В.В. ЯЛТЫХОВ**

(Полоцкий государственный университет)

*Рассматривается многокритериальная оптимизация (МК) как новая методика уравнивания, разработанная под руководством профессора В.И. Мицкевича. Её фундамент заложен на основе обобщения метода Лр-оценок, где применяется постоянный для всех результатов измерений показатель степени  $n$  ( $n = 2$  – метод наименьших квадратов;  $n = 1$  – метод наименьших модулей). Метод МК предусматривает использование индивидуальных для каждого измерения степеней  $n_i$  путем поиска их с помощью минимизации двух и более критериальных функций. Многовекторная оптимизация позволяет получить в процессе уравнивания результаты оценки точности в 1,3 раза меньше, чем классический метод наименьших квадратов (МНК) при уравнивании плановых геодезических сетей и 1,5...3 раза меньше применительно к нивелирным и спутниковым GPS-сетям. Последнее утверждение основано на результатах исследований, приведенных в статье при уравнивании методами МНК и МК тестовых примеров высотных геодезических сетей, известных для геодезической общественности при анализе методик поиска грубых ошибок результатов измерений.*

**Введение.** Одним из наиболее существенных недостатков современных методов уравнивания геодезических сетей, включая и метод Лр-оценок, является то, что все они выполняют математическую обработку результатов измерений по одному скалярному критерию эффективности решения. Однако всё чаще стали применяться методы, осуществляющие выбор решения по нескольким критериям. Этими характеристиками обладает МК-метод.

Здесь предлагается находить индивидуальные степени для каждого измерения не средствами математической статистики, а путем многокритериальной оптимизации под условием минимума максимального планового и высотного положения определяемых пунктов. Чтобы воспользоваться МК методом, в 2000 году была разработана методика оценки точности положения пункта в условиях многостепенной оптимизации [5], когда для каждого измерения используется индивидуальная степень  $n_i$  под условием минимума дополнительных критериальных функций. Эта методика сначала была реализована на базе нелинейных, а с 2004 года – линейных способов уравнивания плановых и высотных геодезических сетей. В 2003 году была составлена программа NIWA4.EXE по уравниванию МК-методом нивелирных сетей на базе нелинейного метода Ньютона. В 2009 году разработан программный продукт NIWA44.EXE по реализации линейного МК-способа уравнивания высотных геодезических сетей, который в 10 раз уменьшил время обработки на ЭВМ и при уравнивании тестового примера 1 из [1] и примера 2 из [2, 3] на Pentium 3 занял 1 с и 30 минут соответственно.

**Основная часть.** Рассмотрим уравнивание двух нивелирных тестовых примеров путем многокритериальной оптимизации по двум целевым функциям:

$$\Phi_1 H = \sum_{i=1}^N P_{n_i} |L_i H|^{n_i}, \quad (1)$$

где  $H$  – отметки пунктов;  $P_{n_i} = \frac{1}{\sigma_i^{n_i}}$  – веса измерений, число которых равно  $N$ ;  $n$  – показатель степени.

Вторая критериальная функция

$$\Phi_2 H = \min(\max M), \quad (2)$$

где  $M$  – ошибка положения определяемого пункта. Оценка точности выполняется по формулам:

$$Q = F P_n^{-1} F^T, \quad (3)$$

$$F = (A^T C A)^{-1} A^T C, \quad (4)$$

$$C = P_n n(n-1) |V_n|^{n-2}, \quad (5)$$

$$M = \mu \sqrt{Q_{jj}}, \quad (6)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V_n^T P_n V_n}{r}}, \quad (7)$$

где  $A$  – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок;  $V_n$  – вектор поправок в измерения из уравнивания МК методом;  $r$  – количество избыточных измерений.

Уравненные отметки для свободной нивелирной сети, опирающейся на один исходный пункт, вычисляются в  $j$ -м приближении по формуле [6]:

$$H^{(j+1)} = H^{(j)} - \frac{1}{n_i - 1} FL(H), \quad (8)$$

причем  $H^0$  – начальные отметки при  $j = 0$  – для определяемых реперов определяются первоначально по МНК [4].

На рисунке приведена схема нивелирной сети для первого тестового примера из [1, с. 254].

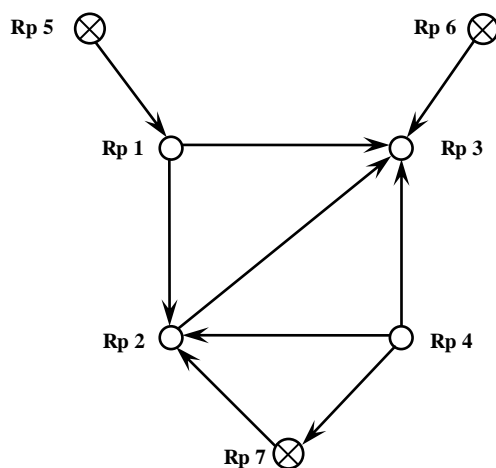


Схема нивелирной сети

В таблице 1 даны сведения о первом тестовом примере: превышения  $h$ ;  $P_2$  и  $n$ , полученные по МК-методу (программа NIWA44.EXE).

Таблица 1

Сведения о первом тестовом примере

№ превышения	Номера пунктов		Превышение	Вес превышения	Значение степени
1	5	1	6.1250	1.2	2.8
2	1	3	8.3200	0.9	2.3
3	6	3	5.5800	1.1	2.2
4	1	2	1.3680	1.5	2.2
5	4	2	4.6940	0.9	2.0
6	4	3	11.6520	0.7	1.6
7	7	2	–.9050	1.2	1.9
8	2	3	6.9440	1.1	1.6
9	4	7	5.5850	1.0	1.7

В таблице 2 приведены результаты уравнивания первого тестового примера по МНК по программе NIWA2.EXE. Методика нуль-свободного уравнивания изложена в [4]. В таблице 3 отражены результаты обработки по формулам (1) – (8) для первого тестового примера по программе NIWA44.EXE. Результаты уравнивания этого же примера по программе NIWA4.EXE (нелинейное уравнивание) опубликованы в [6].

Таблица 2

Результаты уравнивания первого тестового примера

Номер пункта	Свободная сеть		Нуль-свободная сеть			
	уравненные отметки	средняя квадратическая ошибка отметки	средняя плоскость	средняя квадратическая ошибка отметки	относительно исходных пунктов	средняя квадратическая ошибка отметки
1	189.6310	.0073	–.7493	.0052	189.6224	.0065
2	190.9996	.0092	.6193	.0044	190.9910	.0064
3	197.9500	.0096	7.5697	.0047	197.9414	.0063
4	186.3067	.0105	–4.0736	.0060	186.2981	.0078
6	192.3700	.0122	1.9897	.0092	192.3614	.0083
7	191.8987	.0108	+1.5184	.0068	191.8902	.0072
5	183.5060	.0000	–6.8743	.0092	183.4974	.0083

Таблица 3

Результаты уравнивания первого тестового примера (многокритериальная оптимизация)

Номер пункта	Свободная сеть		Нуль-свободная сеть			
	уравненные отметки	средняя квадратическая ошибка отметки	средняя плоскость	средняя квадратическая ошибка отметки	относительно исходных пунктов	средняя квадратическая ошибка отметки
1	189.6310	.0011	–.7489	.0022	189.6230	.0029
2	190.9999	.0037	.6200	.0033	190.9918	.0040
3	197.9493	.0054	7.5694	.0043	197.9413	.0044
4	186.3061	.0063	–4.0738	.0048	186.2980	.0057
6	192.3693	.0065	1.9894	.0053	192.3613	.0049
7	191.8978	.0066	1.5179	.0053	191.8897	.0049
5	183.5060	.0000	–6.8739	.0025	183.4980	.0030

Таблицы 4 – 6 содержат результаты обработки второго тестового примера. Содержание таблиц можно пояснить так же, как и для таблиц 1 – 3.

Таблица 4

Сведения о втором тестовом примере

№ превышения	Номера пунктов		Превышение	Вес превышения	Значение степени
1	2		3	4	5
1	301	302	.6170	1.28	2.4
2	302	301	–.6140	1.28	2.3
3	302	303	9.1770	0.68	2.2
4	303	302	–9.1830	0.68	2.3
5	303	304	–6.3200	0.85	2.0
6	304	303	6.3210	0.85	1.9
7	304	305	1.5540	0.83	2.0
8	305	304	–1.5480	0.83	1.8
9	305	306	–2.3640	0.62	2.2
10	306	305	2.3670	0.62	2.0
11	306	307	.8520	0.60	1.9
12	307	306	–.8580	0.60	2.1
13	307	308	.8980	0.88	1.9
14	308	307	–.8870	0.88	1.8
15	308	309	–2.2680	0.48	1.9
16	309	308	2.2770	0.48	1.7
17	301	422	1.6070	6.20	2.3
18	422	423	6.0530	5.50	2.3
19	423	424	–5.2180	7.30	2.2
20	424	425	–6.8350	2.20	1.8
21	425	431	–1.9970	7.1	2.1
22	431	435	9.9600	7.6	2.2
23	435	437	–5.9590	7.0	2.1
24	437	440	2.3280	10.0	1.9
25	440	309	2.2450	22.0	2.0

Продолжение таблицы 4

1	2		3	4	5
26	309	404	5.7470	18.1	2.5
27	404	407	6.1480	14.4	2.2
28	407	408	-2.5090	4.3	1.8
29	408	410	-.4500	14.7	2.0
30	410	411	2.1580	6.2	2.1
31	411	414	-4.4360	19.2	2.3
32	414	415	-3.2510	6.3	2.0
33	415	419	-.6910	17.1	2.2
34	419	420	9.6430	1.8	1.9
35	420	301	-14.5510	7.6	2.3
36	440	450	.9120	3.4	1.9
37	450	449	-.9480	3.1	1.8
38	449	307	3.7080	5.8	1.7
39	307	404	4.3560	18.7	2.2
40	449	451	6.5140	2.6	2.1
41	451	309	-4.2440	5.2	1.7
42	435	448	-4.5160	10.0	1.9
43	448	490	1.3360	7.1	1.8
44	490	450	.5190	5.9	2.1
45	437	448	1.4780	5.2	1.9
46	448	447	.7310	4.1	1.6
47	447	446	-1.6680	4.1	1.8
48	446	423	9.4570	7.8	1.7
49	431	493	6.2860	7.4	1.9
50	493	435	3.6630	6.3	2.2
51	431	447	6.2640	16.1	1.8
52	447	451	6.6250	10.9	1.4
53	451	306	-3.6500	5.0	1.2
54	306	473	14.4640	7.3	2.4
55	473	475	-1.9030	6.2	1.6
56	475	415	-9.6880	6.3	2.0
57	425	423	12.0570	6.9	2.3
58	425	459	-.1140	5.8	2.2
59	459	458	1.0230	4.0	1.9
60	458	457	4.1200	6.7	1.9
61	457	424	1.9240	7.6	2.0
62	446	303	11.6080	6.5	2.1
63	303	461	1.8390	4.6	1.0
64	461	462	2.4510	4.7	1.1
65	462	420	.4000	5.9	1.7
66	462	415	-8.4980	7.4	2.0
67	303	422	-8.1790	3.0	2.1
68	303	492	-4.1860	1.2	1.8
69	492	302	-5.0000	1.2	2.0
70	302	460	4.5580	5.6	1.7
71	460	419	-.2810	5.6	1.9
72	460	301	-5.2070	3.7	2.0
73	303	304	-6.2420	5.9	1.1
74	304	465	-.0890	7.0	1.9
75	465	307	.2510	5.4	1.1
76	303	305	-4.6110	5.5	1.1
77	305	491	-2.0000	1.0	1.1
78	491	306	-.4490	0.6	1.5
79	303	306	-7.0180	6.4	1.1
80	465	466	13.1560	4.8	2.3
81	466	468	-7.9940	9.8	1.8
82	468	469	2.4980	5.0	1.3
83	469	404	-2.9850	6.4	1.9
84	469	407	3.1870	6.7	1.5
85	469	408	.6580	6.4	1.9
86	469	494	4.5300	5.0	1.8
87	494	468	-7.0280	6.8	1.9

Окончание таблицы 4

1	2		3	4	5
88	466	482	-2.0010	6.2	1.0
89	482	463	-1.2850	12.4	1.7
90	463	419	-8.4700	7.6	1.8
91	463	461	-2.5840	7.0	1.5
92	461	460	-5.6300	2.0	1.8
93	482	464	-5.2530	12.2	1.7
94	464	419	-4.4850	5.6	1.9
95	463	464	-3.9380	2.3	1.4
96	482	411	-1.3330	13.8	2.3
97	482	414	-5.7710	5.7	2.0
98	482	474	4.6150	10.8	2.0
99	474	410	-8.0860	6.0	2.2
100	474	468	-10.7150	5.5	2.0
101	475	478	.8650	24.9	2.0
102	478	408	-4.5550	5.7	2.2
103	478	411	-2.8970	12.7	1.7
104	474	473	-2.0740	8.2	2.1

Таблица 5

Результаты уравнивания второго тестового примера

Номер пункта	Свободная сеть		Нуль-свободная сеть			
	уровненные отметки	средняя квадратическая ошибка отметки	средняя плоскость	средняя квадратическая ошибка отметки	относительно исходных пунктов	средняя квадратическая ошибка отметки
1	2	3	4	5	6	7
404	307.9373	.1316	1.9999	.1122	307.9525	.1213
407	314.1122	.1439	8.1747	.1222	314.1273	.1365
408	311.5972	.1372	5.6597	.1140	311.6123	.1299
410	311.1210	.1389	5.1836	.1180	311.1361	.1329
411	313.2694	.1384	7.3319	.1183	313.2845	.1330
414	308.8131	.1259	2.8756	.1097	308.8282	.1219
415	305.5200	.1132	-4.174	.0994	305.5352	.1100
419	304.9473	.0869	-9.902	.0825	304.9624	.0884
420	314.5265	.0884	8.5891	.0868	314.5416	.0913
422	301.5777	.0763	-4.3597	.0759	301.5928	.0745
423	307.6088	.1111	1.6713	.0953	307.6239	.1068
424	302.3911	.1399	-3.5463	.1203	302.4063	.1362
425	295.5464	.1344	-10.3911	.1134	295.5615	.1302
431	293.5442	.1395	-12.3933	.1177	293.5593	.1335
435	303.5087	.1409	-2.4287	.1191	303.5239	.1339
437	297.5464	.1371	-8.3910	.1163	297.5615	.1287
440	299.8880	.1289	-6.0494	.1107	299.9032	.1174
446	298.1264	.1036	-7.8110	.0892	298.1415	.0961
447	299.7684	.1118	-6.1691	.0919	299.7835	.1022
448	299.0149	.1241	-6.9226	.1022	299.0300	.1149
449	299.8424	.0990	-6.0951	.0810	299.8575	.0811
450	300.8033	.1163	-5.1341	.0969	300.8184	.1029
451	306.3572	.0914	.4198	.0744	306.3723	.0712
457	300.5013	.1794	-5.4362	.1620	300.5164	.1771
458	296.4113	.1824	-9.5261	.1648	296.4265	.1803
459	295.4063	.1717	-10.5311	.1534	295.4214	.1692
460	305.3581	.0653	-.5793	.0710	305.3732	.0694
461	311.1896	.0736	5.2522	.0727	311.2048	.0735
462	313.8984	.0995	7.9609	.0940	313.9135	.0996
463	313.4805	.1005	7.5431	.0921	313.4956	.0998
464	309.4930	.1061	3.5556	.0974	309.5082	.1054
465	303.3391	.0972	-2.5983	.0842	303.3542	.0833
466	316.5319	.1133	10.5944	.0958	316.5470	.1044
468	308.4783	.1256	2.5408	.1024	308.4934	.1174
469	310.9470	.1285	5.0096	.1043	310.9621	.1198
473	317.1289	.1149	11.1915	.0980	317.1441	.1054

Окончание таблицы 5

1	2	3	4	5	6	7
474	319.2056	.1208	13.2682	.0985	319.2208	.1131
475	315.2243	.1282	9.2869	.1125	315.2395	.1226
478	316.1474	.1502	10.2100	.1301	316.1625	.1446
482	314.6161	.1074	8.6786	.0881	314.6312	.1015
490	300.3145	.1411	-5.6229	.1233	300.3296	.1320
491	303.0837	.0676	-2.8538	.0562	303.0988	.0387
492	305.5815	.0563	-3.560	.0621	305.5966	.0501
493	299.8386	.1624	-6.0989	.1432	299.8537	.1572
494	315.4894	.1490	9.5520	.1286	315.5045	.1422
302	300.5945	.0381	-5.3430	.0516	300.6096	.0354
303	309.7545	.0449	3.8170	.0474	309.7696	.0291
304	303.4597	.0536	-2.4777	.0486	303.4749	.0273
305	305.0340	.0590	-.9034	.0485	305.0492	.0250
306	302.6644	.0620	-3.2730	.0479	302.6795	.0248
307	303.5243	.0666	-2.4131	.0503	303.5395	.0286
308	304.4154	.0735	-1.5220	.0571	304.4305	.0372
309	302.1421	.0765	-3.7953	.0601	302.1572	.0420
301	300.0000	.0000	-5.9374	.0589	300.0151	.0468

Таблица 6

Результаты уравнивания второго тестового примера (многокритериальная оптимизация)

Номер пункта	Свободная сеть		Нуль-свободная сеть			
	уровненные отметки	средняя квадратическая ошибка отметки	средняя плоскость	средняя квадратическая ошибка отметки	относительно исходных пунктов	средняя квадратическая ошибка отметки
1	2	3	4	5	6	7
404	307.9527	.0384	2.0012	.0369	307.9440	.0346
407	314.1266	.0550	8.1751	.0515	314.1179	.0520
408	311.6137	.0487	5.6622	.0438	311.6050	.0459
410	311.1378	.0457	5.1863	.0381	311.1291	.0422
411	313.2858	.0520	7.3343	.0426	313.2771	.0469
414	308.8452	.0484	2.8937	.0415	308.8365	.0476
415	305.5907	.0458	-.3608	.0394	305.5820	.0452
419	304.8982	.0324	-1.0533	.0310	304.8895	.0339
420	314.5348	.0292	8.5833	.0297	314.5261	.0321
422	301.6108	.0196	-4.3407	.0225	301.6021	.0231
423	307.6456	.0320	1.6941	.0304	307.6369	.0353
424	302.4272	.0441	-3.5243	.0414	302.4185	.0475
425	295.5828	.0384	-10.3686	.0350	295.5742	.0419
431	293.5811	.0472	-12.3703	.0420	293.5725	.0497
435	303.5461	.0512	-2.4053	.0436	303.5375	.0513
437	297.5822	.0544	-8.3692	.0462	297.5736	.0532
440	299.9213	.0525	-6.0302	.0444	299.9126	.0492
446	298.1697	.0352	-7.7818	.0351	298.1610	.0377
447	299.8101	.0495	-6.1414	.0455	299.8014	.0506
448	299.0516	.0541	-6.8999	.0453	299.0429	.0519
449	299.8774	.0465	-6.0740	.0386	299.8688	.0413
450	300.8368	.0510	-5.1146	.0423	300.8282	.0472
451	306.3959	.0487	.4445	.0407	306.3873	.0430
457	300.5374	.0564	-5.4141	.0533	300.5287	.0589
458	296.4485	.0559	-9.5030	.0531	296.4398	.0592
459	295.4436	.0468	-10.5079	.0451	295.4349	.0517
460	305.1954	.0280	-.7561	.0312	305.1867	.0308
461	310.8307	.0445	4.8792	.0459	310.8220	.0457
462	314.0935	.0544	8.1421	.0516	314.0849	.0570
463	313.3526	.0540	7.4011	.0492	313.3439	.0526
464	309.3997	.0533	3.4482	.0489	309.3910	.0515
465	303.3694	.0488	-2.5820	.0449	303.3608	.0465
466	316.5204	.0523	10.5689	.0483	316.5117	.0493
468	308.4892	.0480	2.5378	.0405	308.4806	.0443

Окончание таблицы 6

1	2	3	4	5	6	7
469	310.9581	.0480	5.0067	.0421	310.9495	.0437
473	317.1618	.0361	11.2103	.0312	317.1531	.0305
474	319.2213	.0408	13.2698	.0330	319.2126	.0374
475	315.2714	.0545	9.3200	.0474	315.2628	.0518
478	316.1692	.0562	10.2177	.0488	316.1605	.0521
482	314.6186	.0489	8.6671	.0411	314.6099	.0473
490	300.3470	.0568	-5.6045	.0484	300.3383	.0530
491	303.1330	.0492	-2.8185	.0440	303.1243	.0418
492	305.6167	.0189	-.3348	.0246	305.6080	.0219
493	299.8745	.0564	-6.0769	.0504	299.8659	.0573
494	315.5000	.0566	9.5485	.0502	315.4913	.0529
302	300.6195	.0076	-5.3320	.0179	300.6108	.0135
303	309.8007	.0100	3.8492	.0174	309.7920	.0129
304	303.4898	.0157	-2.4617	.0183	303.4811	.0105
305	305.0512	.0201	-.9003	.0200	305.0425	.0100
306	302.6890	.0214	-3.2624	.0201	302.6803	.0102
307	303.5473	.0234	-2.4041	.0212	303.5387	.0117
308	304.4393	.0276	-1.5122	.0238	304.4306	.0158
309	302.1664	.0300	-3.7851	.0253	302.1577	.0188
301	300.0000	.0000	-5.9515	.0182	299.9913	.0147

По числовым данным таблиц 1...3 для первого примера можно сделать следующие **выводы**:

1) средняя квадратическая ошибка высотного положения в слабом месте свободной сети (репер 6,  $M_6 = 0,0122$  м) уменьшилась после применения МК ( $M_6 = 0,0065$  м) в 1,9 раза;

2) средняя квадратическая ошибка отметки  $M_6 = 0,0092$  м для нуль-свободной сети относительно средней плоскости для МНК больше, чем после обработки по МК ( $M_6 = 0,0053$  м) в 1,7 раза;

3) для нуль-свободных сетей относительно исходных пунктов имеем:  $M_6 = 0,0083$  м (МНК),  $M_4 = 0,0057$  м (МК) оценка точности уменьшилась в 1,4 раза.

По числовым данным таблиц 4 – 6 для второго примера можно сделать следующие выводы:

1) средняя квадратическая ошибка высотного положения в слабом месте свободной сети (репер 458,  $M_{458} = 0,1824$  м) уменьшилась после применения МК ( $M_6 = 0,0568$  м) в 2,6 раза;

2) средняя квадратическая ошибка отметки  $M_{458} = 0,1648$  м для нуль-свободной сети относительно средней плоскости для МНК больше, чем после обработки по МК ( $M_{458} = 0,0533$  м) в 3,1 раза;

3) для нуль-свободных сетей относительно исходных пунктов имеем:  $M_{458} = 0,1803$  м (МНК),  $M_{458} = 0,0592$  м (МК) оценка точности уменьшилась в 3,0 раза.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков, В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений / В.Д. Большаков, П.А. Гайдаев; под ред. В.Д. Большакова. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
2. Дьяков, Б.Н. О контроле, поиске и учете грубых ошибок измерений / Б.Н. Дьяков, М.П. Рудникова // Геодезия и картография. – 1997. – № 6. – С. 21 – 24.
3. Дьяков, Б.Н. Поиск грубых ошибок при обработке нивелирной сети / Б.Н. Дьяков, М.П. Рудникова // Геодезия и картография. – 1998. – № 8. – С. 13 – 14.
4. Мицкевич, В.И. О вычислении начальных координат пунктов для последующего уравнивания нуль-свободных геодезических сетей / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский, В.Г. Сержанов // Автоматизированные технологии изысканий и проектирования. – 2001. – № 2(4). – С. 35 – 36.
5. Мицкевич, В.И. Многокритериальное уравнивание и оценка точности плановых геодезических сетей на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, П.М. Левданский; Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 1999. – 5 с. – Деп в ОНИПР ЦНИИГАиК 28.06.99, № 681. – гд.99.
6. Усов, Д.В. Многокритериальная оптимизация нивелирных сетей традиционными и нетрадиционными методами / Д.В. Усов, В.В. Ялтыхов, П.М. Левданский // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. Ф. Строительство. Прикладные науки. – 2009. – № 6. – С. 118 – 125.

Поступила 15.10.2009